PART2 円と直線の共有点の座標と個数

要点 ① 円と直線の共有点の座標

円と直線の共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

例 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求める。

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots\cdots① \\ y=x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$x^2+(x+1)^2=25$$

$$x^2+x-12=0 \qquad (x-3)(x+4)=0$$

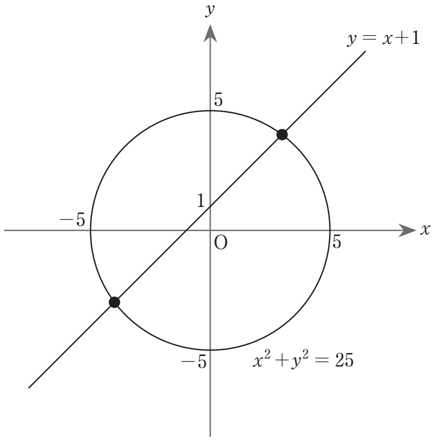
$$x=3,\ -4$$

これを　に代入して

$x=3$ のとき　$y=4$

$x=-4$ のとき $y=-3$

よって，共有点の座標は　$(3,\ 4)$，$(-4,\ -3)$



要点 ② 円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式を連立させ，1 つの文字，例えば y を消去して得られる x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と，円と直線の共有点の個数は一致する。この 2 次方程式の判別式を D とすると，共有点の個数は D の符号によって次のようになる。

円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点は 0 個

例　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x-1$ の共有点の個数を求める。

$x^2+y^2=4$ に $y=3x-1$ を代入して整理すると　$10x^2-6x-3=0$

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-10\cdot(-3)=39$

よって，求める共有点の個数は　個

2　次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2)　$x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3)　$x^2+y^2=8$，$y=x+6$

Point Pickup

円と直線の共有点

円の方程式と直線の方程式を連立させ，y を消去して得られる x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …… ①　において

・①の実数解が，円と直線の共有点の x 座標。共有点の y 座標は，この実数解を直線の式の x に代入して求める。

・①の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点は 0 個

第 6 講　PART2 確認問題

次の円と直線の共有点の個数を求め，共有点がある場合はその座標を求めよ。答えは①～⑤のうちから選べ。

1　$x^2+y^2=10$，$y=x-2$

ア

①　共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-1,\ -3)$，$(3,\ 1)$

②　共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-3,\ -1)$，$(1,\ 3)$

③　共有点の個数は 1 個　その座標は　$(3,\ 1)$

④　共有点の個数は 1 個　その座標は　$(-1,\ -3)$

⑤　共有点の個数は 0 個

2　$x^2+y^2=20$，$y=-2x+10$

イ

①　共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-2,\ 14)$，$(2,\ 6)$

②　共有点の個数は 2 個　その座標は　$(-4,\ 18)$，$(4,\ 2)$

③　共有点の個数は 1 個　その座標は　$(2,\ 6)$

④　共有点の個数は 1 個　その座標は　$(4,\ 2)$

⑤　共有点の個数は 0 個

3 $x^2+y^2=4$，$y=-x+3$

ウ

① 共有点の個数は 2 個　その座標は $(-2,\ 5)$，$(2,\ 1)$

② 共有点の個数は 2 個　その座標は $(-3,\ 6)$，$(3,\ 0)$

③ 共有点の個数は 1 個　その座標は $(2,\ 1)$

④ 共有点の個数は 1 個　その座標は $(3,\ 0)$

⑤ 共有点の個数は 0 個

【MEMO】

PART2 円と直線の共有点の座標と個数

2 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2) $x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3) $x^2+y^2=8$，$y=x+6$

[解答]

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=2x-5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(2x-5)^2=5$

$x^2-4x+4=0$　　$(x-2)^2=0$　　$x=2$

このとき②より $y=-1$

よって，共有点の個数は 1 個　　その座標は $(2,\ -1)$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(-2x+1)^2=2$

$5x^2-4x-1=0$　　$(5x+1)(x-1)=0$　　$x=-\dfrac{1}{5},\ 1$

②より　$x=-\dfrac{1}{5}$ のとき $y=\dfrac{7}{5}$　　$x=1$ のとき $y=-1$

よって，共有点の個数は 2 個　　その座標は $\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，$(1,\ -1)$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ① \\ y=x+6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(x+6)^2=8$　　$2x^2+12x+28=0$　　$x^2+6x+14=0$

この方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot 14=-5<0$

よって，共有点の個数は 0 個

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots① \\ y=x-2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(x-2)^2=10$$ [A]

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1,\ 3$$

②より

$x=-1$ のとき　$y=-3$

$x=3$ のとき　$y=1$

よって，**共有点の個数は 2 個**

その座標は $(-1,\ -3)$，$(3,\ 1)$

[A]　共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

2 [正解] イ：④

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & \cdots\cdots① \\ y=-2x+10 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-2x+10)^2=20$$ [B]

$$x^2-8x+16=0$$

$$(x-4)^2=0$$

$$x=4$$

このとき②より $y=2$

よって，**共有点の個数は 1 個**

その座標は (4，2)

[B]　共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。

3 [正解] ウ：⑤

[解説]

円と直線の方程式をそれぞれ

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots① \\ y=-x+3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とおき，②を①に代入して整理すると

$$x^2+(-x+3)^2=4$$

$$2x^2-6x+5=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot5=-1<0$$ [C]

よって，**共有点の個数は 0 個**

[C]　円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると
$D>0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個
$D=0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個
$D<0 \iff$ 円と直線の共有点は 0 個